УДК 517.929

А. Ю. Богданов

НОВЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ ТИПА ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА[1]

Аннотация. Рассматриваются вопросы, связанные с асимптотическим поведением решений неавтономной дискретной системы третьего порядка типа Лотки – Вольтерра. Данная система описывает течение инфекционного заболевания в разнородной группе людей, состоящей из трех популяций. На основе новых методов теории предельных уравнений и предельных функций Ляпунова получены условия асимптотической устойчивости, которые являются условиями полного выздоровления всех популяций. Представленная методика позволяет исследовать асимптотическую устойчивость систем Лотки – Вольтерра любой конечной размерности. Рассмотрены дополнительные примеры, показывающие, что полученные на основе вырожденной функции Ляпунова условия асимптотической устойчивости являются не только достаточными, но и необходимыми с точки зрения классических условий устойчивости по линейному приближению.

Ключевые слова: неавтономная дискретная система типа Лотки – Вольтерра, предельные уравнения, асимптотическая устойчивость, развитие прямого метода Ляпунова.

Abstract. The problems connected with asymptotic behavior of solutions of nonautonomous third-order discrete system of Lotka – Volterra type are considered. This system describes the dynamics of infectious disease in a heterogeneous group which consists of three populations. On the basis of new methods of limiting equations theory and limiting Lyapunov functions the conditions of asymptotic stability are obtained which provide full convalescence of all populations. The presented approach allows one to carry out the investigation of asymptotic stability of Lotka-Volterra system with arbitrary number of populations. The additional examples are considered which show that asymptotic stability conditions obtained on the basis of degenerative Lyapunov function are not only sufficient, but also necessary from point of view of classical stability conditions by linear approximation.

Keywords: nonautonomous discrete system of Lotka – Volterra type, limiting equations, asymptotic stability, extension of direct Lyapunov method

Введение

При математическом моделировании процессов различной природы дискретно-временными системами достаточно часто приходится учитывать зависимость процессов от времени. При этом анализ асимптотического поведения траекторий неавтономной системы в нелинейном случае представляет собой достаточно сложную, до конца не изученную проблему даже для систем с фиксированным конечным запаздыванием. В статье рассматриваются вопросы, связанные с применением нового класса теорем из работ [1–3] об асимптотическом поведении движений неавтономных дискретных систем. В этих работах проводится построение топологической динамики неавтоном-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-97010, 09-08-97004, 08-08-97033.

ной дискретной системы, отличное от ранее предложенного в литературе. При этом существование функции Ляпунова со знакопостоянной разностью позволяет более точно локализовать положительное предельное множество решения $\Omega^+(n_0, x_0)$. В ранее опубликованной работе [2] доказаны теоремы об устойчивости (асимптотической устойчивости) состояния $x = 0$ дискретной системы, когда существует определенно-положительная функция Ляпунова, имеющая знакопостоянную разность в силу рассматриваемой системы. Обобщение метода предельных уравнений, полученное в работах [1, 3], позволило развить и обобщить результаты об асимптотической устойчивости на случай знакопостоянной (неотрицательной) функции Ляпунова со знакопостоянной разностью. Данная работа иллюстрирует преимущества использования теорем из [1–3] на примере конкретной динамической системы.

1 Постановка задачи. Основные предположения

Рассмотрим дискретную динамическую модель третьего порядка, описывающую течение болезни в некоторой биологической системе. Даны три различные популяции, где инфицированные члены первой и второй популяций могут заражать друг друга, а инфицированные члены третьей популяции могут заражать членов всех трех популяций. Будем предполагать, что выздоровление возможно, но иммунитет отсутствует и популяции постоянны. Пусть x_i – инфицированная часть популяции P_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда $(1 - x_i)$ – здоровая часть, которая воспринимает инфекцию (заметим, что можно рассматривать в качестве своеобразных «популяций» три группы компьютеров в сети, которые могут распространять постоянно видоизменяющийся компьютерный вирус).

При сделанных предположениях нелинейная дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_1(n)x_2(n) + c_1(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + b_1(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_2(n)x_1(n) + c_2(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + b_2(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_3(n)x_3(n) + c_3(n)x_1(n) + c_4(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + b_3(n)x_3(n), \end{cases} \quad (1)$$

где $0 \le a_i \le 1, 0 \le b_i \le 1, 0 \le c_i \le 1$.

Введем также дополнительные условия, обеспечивающие корректность поставленной задачи, а именно $x_i(n) \in \Gamma = \{x : 0 \le x_i \le 1, i = 1, 2, 3\}$, $\forall n \ge n_0$, $x(n_0) \in \Gamma$:

$$\begin{cases} a_1(n) + c_1(n) \le 1, \\ a_2(n) + c_2(n) \le 1, \\ a_3(n) + c_3(n) + c_4(n) \le 1. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения, предельные к (1), имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_1^*(n)x_2(n) + c_1^*(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + b_1^*(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_2^*(n)x_1(n) + c_2^*(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + b_2^*(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_3^*(n)x_3(n) + c_3^*(n)x_1(n) + c_4^*(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + b_3^*(n)x_3(n), \end{cases} \quad (3)$$

где функции $a_i^*(n), b_i^*(n), c_i^*(n)$ являются предельными для $a_i(n), b_i(n), c_i(n)$ соответственно для некоторой последовательности $n_k \to +\infty$, т.е.

$$a_i^*(n) = \lim_{n_k \to +\infty} a_i(n+n_k), b_i^*(n) = \lim_{n_k \to +\infty} b_i(n+n_k);$$

$$c_i^*(n) = \lim_{n_k \to +\infty} c_i(n+n_k).$$

Допустим также, что функции, входящие систему (1), удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} fb_1(n) + ga_2(n) + hc_3(n) \le f, \\ fa_1(n) + gb_2(n) + hc_4(n) \le g, \\ fc_1(n) + gc_2(n) + ha_3(n) + hb_3(n) \le h, \end{cases} \tag{4}$$

где $f > 0, g > 0, h > 0$ – произвольные константы.

2 Развитие прямого метода Ляпунова и условия асимптотической устойчивости

Для исследования асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) рассмотрим функцию Ляпунова $V = V(x_1, x_2, x_3) = fx_1 + gx_2 + hx_3$. Так как все решения системы (1), стартующие из области Γ, остаются в ней, то при сделанных предположениях $V(x_1, x_2, x_3) \ge 0$. Вычислим первую разность функции V в силу системы (1):

$$\dot{V}_{(1)} = fa_1x_2 + fc_1x_3 - fa_1x_1x_2 + fb_1x_1 + ga_2x_1 + gc_2x_3 - ga_2x_1x_2 -$$

$$-gc_2x_2x_3 + gb_2x_2 + ha_3x_3 + hc_3x_1 + hc_4x_2 - ha_3x_3^2 - hc_3x_1x_3 - hc_4x_2x_3 + hb_3x_3 -$$

$$-fx_1 - gx_2 - hx_3 = (fb_1 + ga_2 + hc_3 - f)x_1 + (fa_1 + gb_2 + hc_4 - g)x_2 +$$

$$+(fc_1 + gc_2 + ha_3 + hb_3 - h)x_3 - (fa_1 + ga_2)x_1x_2 - (fc_1 + hc_3)x_1x_3 -$$

$$-(gc_2 + hc_4)x_2x_3 - ha_3x_3^2 \le -ha_3(n)x_3^2 = -W(n, x_3) \le 0.$$

Предельная к $W(n, x_3)$ функция имеет вид $W^*(n, x_3) = ha_3^*(n)x_3^2$. Следовательно, множество $\{W^*(n, x) = 0\}$ представляет собой плоскость $\{x_3 = 0\}$, если $a_3(n) \ge \varepsilon > 0$. Но так как единственной квазиинвариантной точкой этого множества является точка $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$, то по теореме об асимптотической устойчивости из [3] при выполнении условий (2) и (4) нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Проведем теперь дополнительный анализ полученных достаточных условий равномерной асимптотической устойчивости (4). Пусть $u = \dfrac{f}{g} > 0$, $v = \dfrac{h}{g} > 0$, тогда система неравенств (4) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} v \le \dfrac{1-b_2(n)}{c_4(n)} - \dfrac{a_1(n)}{c_4(n)}u, \\ v - \dfrac{c_2(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1} - \dfrac{c_1(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}u, \\ v \le -\dfrac{a_2(n)}{c_3(n)} - \dfrac{b_1(n)-1}{c_3(n)}u, \\ u > 0, v > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Используя графическое представление полученных неравенств в виде соответствующих полуплоскостей, получим условия существования непустой области пересечения трех полуплоскостей. В нашем случае знаки неизвестны только у коэффициентов $-\dfrac{c_2(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}$ и $-\dfrac{c_1(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}$, где функция $a_3(n)+b_3(n)-1$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим оба случая:

1. $a_3(n)+b_3(n)-1>0$. Этот случай не дает решения, так как полуплоскость, заданная неравенством $v \le -\dfrac{c_2(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1} - \dfrac{c_1(n)}{a_3(n)+b_3(n)-1}u$, не пересекает область $\{u>0, v>0\}$. Поэтому условия (5) здесь не выполняются.

2. $a_3(n)+b_3(n)-1<0$. Очевидно, что полуплоскости, заданные вторым и третьим соотношением из системы (5), пересекаются при условии $\dfrac{1-b_1}{c_3} > \dfrac{c_1}{1-a_3-b_3}$. При этом точка пересечения границ этих полуплоскостей равна

$$u^* = \frac{c_2c_3 + a_2(1-a_3-b_3)}{(1-b_1)(1-a_3-b_3)-c_1c_3} \text{ при условии } (1-b_1)(1-a_3-b_3) > c_1c_3.$$

Значение в точке u^* на границе полуплоскости, задаваемой первым неравенством системы (5), должно быть больше, чем на границе третьей полуплоскости в той же точке:

$$-\frac{a_1}{c_4}u^* + \frac{1-b_2}{c_4} \ge \frac{1-b_1}{c_3}u^* - \frac{a_2}{c_3}.$$

Преобразуя полученное неравенство, получаем, что система условий (5) эквивалентна следующим условиям:

$$\begin{cases} (c_2c_3 + a_2(1-a_3-b_3))(c_4(1-b_1)+a_1c_3) \le \\ \le (c_3(1-b_2)+a_2c_4)((1-b_1)(1-a_3-b_3)-c_1c_3), \\ (1-b_1)(1-a_3-b_3) > c_1c_3. \end{cases} \tag{6}$$

В соотношениях (6) опущена зависимость функций от дискретного времени n для сокращения записей.

3 Обсуждение результатов

Сравним полученное условие (6) в частном автономном случае с известными достаточными условиями асимптотической устойчивости и неустойчивости автономных нелинейных дискретных систем с выделенной линейной частью. Рассмотрим уравнение

$$x(n+1) = Ax(n) + R(n, x(n)). \tag{7}$$

Теорема 1 [4]. *Если нулевое решение линейного уравнения первого приближения* $x(n+1) = Ax(n)$ *асимптотически устойчиво, т.е. спектральный радиус* $r(A) = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$, *причем* $\| R(n, x(n)) \| \le C \| x(n) \|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, *то решение* $x(n) \equiv 0$ *уравнения* (7) *также асимптотически устойчиво. Если имеется собственное значение* $\lambda_i(A)$, *для которого* $|\lambda_1| > 1$, *то решение* $x(n) \equiv 0$ *неустойчиво независимо от вида нелинейности* $R(n, x)$.

Случаи, когда имеются собственные значения $\lambda_i(A)$ с $|\lambda_1| = 1$, являются критическими. В этих случаях устойчивость нелинейной системы (7) зависит от вида нелинейности $R(n, x)$. Приведем еще одну теорему об устойчивости по первому приближению.

Теорема 2 [5]. *Рассмотрим систему* $x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n))$, *где* $f(n, 0) \equiv 0, \| f(n, x) \| \le \gamma \| x \|$. *Если нулевое решение линейной системы первого приближения* $x(n+1) = A(n)x(n)$ *равномерно асимптотически устойчиво (а значит, экспоненциально устойчиво) и если* γ *достаточно мало, то нулевое решение нелинейной системы также экспоненциально устойчиво.*

Применим теорему 1 к дискретной эпидемической модели (1), предполагая автономность системы. Тогда уравнение первого приближения имеет вид $x(n+1) = Ax(n)$, где $A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & c_4 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$. Собственные значения матрицы A являются корнями характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} -b_1 + \lambda & -a_1 & -c_1 \\ -a_2 & -b_2 + \lambda & -c_2 \\ -c_3 & -c_4 & -a_3 - b_3 + \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 = 0,$$

где $\alpha_0 = b_1 c_4 c_2 + (a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 + b_3) - a_1 c_2 c_3 - a_2 c_1 c_4 + b_2 c_1 c_3$,

$$\alpha_1 = (b_1 + b_2)(a_3 + b_3) + b_1 b_2 - c_2 c_4 - a_1 a_2 - c_1 c_3,$$

$$\alpha_2 = -(a_3 + b_1 + b_2 + b_3).$$

Заметим, что в нашем примере не выполняется необходимое условие устойчивости характеристического уравнения непрерывной линейной системы (теорема Стодолы), когда все коэффициенты характеристического полинома должны быть положительными (в противном случае он не является гурвицевым). Для дискретных систем требование принадлежности собственных значений единичному кругу комплексной плоскости (полиномы Шура) не накладывает подобных ограничений. Так как проверка принадлежности корней многочлена левой полуплоскости представляется задачей гораздо более простой, то преобразуем характеристическое уравнение $\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$, используя конформное преобразование внутренности единичного круга в левую полуплоскость, предложенное в свое время Мизесом, $\lambda = \frac{y+1}{y-1}$. В результате получим новый многочлен, порядок которого остается прежним: $\beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 = 0$. По теореме Мизеса $|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} y_i < 0$. В результате преобразования получены следующие коэффициенты:

$$\beta_0 = 1 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 = 3 + 3\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2;$$

$$\beta_2 = 3 - 3\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = 1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2.$$

По критерию Рауса-Гурвица многочлен $P_3(y) = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3$ устойчив тогда и только тогда, когда положительны все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица $M = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_0 & 0 \\ \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \\ \beta_5 & \beta_4 & \beta_3 \end{pmatrix}$. Известно [6], что для систем третьего и четвертого порядков достаточно проверить положительность только одного, предпоследнего минора Δ_{m-1}, при условии положительности коэффициентов многочлена. Следуя указанному критерию, получаем систему неравенств, определяющую условия асимптотической устойчивости для матрицы системы линейного приближения дискретной эпидемической модели:

$$\begin{cases} \beta_0 > 0, \\ \beta_1 > 0, \\ \beta_2 > 0, \\ \beta_3 > 0, \\ \beta_1\beta_2 - \beta_0\beta_3 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 > 0, \\ 3 + 3\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 > 0, \\ 3 - 3\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \\ 1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \\ 1 - \alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 - \alpha_0^2 > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Сравним условия (6), полученные нами с помощью функции Ляпунова, и алгебраически-корневые условия асимптотической устойчивости (8) в частном случае автономной системы. Так как непосредственное сравнение здесь вряд ли возможно, был проведен компьютерный эксперимент по методу Монте-Карло с генерацией значений 10000000 равномерно распределенных случайных векторных величин в $[0,1]^{10} \subset R^{10}$ (так как в системе 10 параметров). Идеальное совпадение количества точек (60223 точки), удовлетворяющих условиям (6) и (8), показывает их полную эквивалентность в частном случае автономной системы, а также то, что выбранная функция Ляпунова при соблюдении условий теоремы о равномерной асимптотической устойчивости из [3] обеспечивает неулучшаемую (в общем случае) локализацию области равномерной асимптотической устойчивости. При этом нами доказана асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1), если собственные значения линеаризованной системы попадают на границу единичного круга.

Замечание 1. Нулевое решение системы (1) (в автономном случае) не является единственной точкой равновесия. Есть и другие точки равновесия, к которым могут стремиться траектории системы (1). Для двумерной автономной дискретной эпидемической модели [7] формулы координат точки равновесия можно выписать в явном и достаточно компактном виде. Для трехмерного же случая, т.е. системы (1), такие формулы более чем громоздкие, поэтому не представляется возможным здесь выписать их в явном виде, вследствие чего приведем только систему уравнений, решения которой и являются формулами координат точек равновесия, отличных от точки (0,0,0),

$$\begin{cases} (b_1 - a_1x_2 - c_1x_3 - 1)x_1 + a_1x_2 + c_1x_3 = 0, \\ a_2x_1 + (b_2 - a_2x_1 - c_2x_3 - 1)x_2 + c_2x_3 = 0, \\ c_3x_1 + c_4x_2 + (b_3 - a_3x_3 - c_3x_1 - c_4x_2 - 1)x_3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Замечание 2. Для линейной неавтономной системы

$$x(n+1) = A(n)x(n) \tag{10}$$

нахождение конструктивных условий устойчивости является непростой задачей. Часто в технических приложениях используют так называемый метод «замороженных» коэффициентов: при каждом $n \geq n_0$ находят все собственные значения $\lambda_i(n)$ матрицы $A(n)$. Если они удовлетворяют условию $|\lambda_i| \leq \alpha < 1,\ 1 \leq i \leq m,\ n_0 \leq n < +\infty$, то считают, что система (10) асимптотически устойчива. Если же для некоторого s выполняется условие $|\lambda_s(n)| \geq \alpha > 1$, то система (10) неустойчива. Эти утверждения без дополнительных предположений неверны даже в случае периодических и почти периодических систем, что иллюстрируют следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим периодическую систему

$$\begin{cases} x(n+1) = \left(\dfrac{9}{8} + (-1)^n \dfrac{7}{8}\right) y(n), \\ y(n+1) = \left(\dfrac{9}{8} + (-1)^{n+1} \dfrac{7}{8}\right) x(n). \end{cases}$$

Собственные значения матрицы $A(n)$: $\lambda_{1,2}(n) \equiv \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \forall n \in Z^+$, лежат строго внутри единичного круга. Однако этого недостаточно даже для простой устойчивости нулевого решения. Если $n_0 = 0$, то фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(n,0) = \begin{pmatrix} 2^{-2n} & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}, \text{ если } n = 2k - \text{четное;}$$

$$\Phi(n,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2^n \\ 2^{-2n} & 0 \end{pmatrix}, \text{ если } n = 2k+1 - \text{нечетное.}$$

В любом случае решение будет экспоненциально удаляться от начала координат.

Пример 2. Рассмотрим почти периодическую систему

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (\alpha + k\sin n)x_1(n) + (k\cos n)x_2(n), \\ x_2(n+1) = (k\cos n)x_1(n) + (\alpha - k\sin n)x_2(n). \end{cases}$$

Собственные значения матрицы $A(n): \lambda_{1,2}(n) \equiv \{\alpha \pm k\}$. При $\alpha = 0,5$; $k = 0,6$ имеем $\lambda_1 = -0,1$; $\lambda_2 = 1,1$. То есть одно из собственных значений постоянно находится строго вне единичного круга. Однако нулевое решение будет асимптотически устойчиво. Траектория движения в этом случае имеет вид спирали.

Заключение

Результаты и новый подход к анализу предельного поведения решений дискретных систем, полученные в статье, могут быть развиты при исследовании проблемы асимптотической устойчивости широкого класса дискретных неавтономных систем типа Лотки – Вольтерра произвольной размерности. Автором здесь показаны на достаточно сложном примере системы третьего порядка преимущества общих теорем из монографии [1] об асимптотической устойчивости неавтономных нелинейных дискретных систем с использованием знакоположительной функции Ляпунова с неположительной первой разностью.

Список литературы

1. **Богданов, А. Ю.** Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления / А. Ю. Богданов. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 262 с.
2. **Богданов, А. Ю.** Метод предельных функций в теории устойчивости разностных уравнений / А. Ю. Богданов // Комбинаторные и вычислительные методы в математике : сборник научных трудов Сибирского отделения РАН. – Омск, 1999. – С. 82–94.
3. **Богданов, А. Ю.** Об устойчивости точки покоя дискретной системы / А. Ю. Богданов, С. В. Черников // Ученые записки УлГУ. – Ульяновск : УлГУ. – 2004. – Вып. 1 (14). – С. 99–115. – (Фундаментальные проблемы математики и механики).
4. **Афанасьев, В. Н.** Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М. : Высшая школа, 1989. – 447 с.
5. **Халанай, А.** Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М. : Мир, 1971. – 309 с.
6. **Фельдбаум, А. А.** Методы теории автоматического управления / А. А. Фельдбаум, А. Г. Бутковский. – М. : Наука, 1971. – 744 с.
7. **LaSalle, J. P.** The stability of dynamical systems / J. P. LaSalle. – SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1976. – 76 p.

Богданов Андрей Юрьевич
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра прикладной
математики, Ульяновский
государственный университет

E-mail: BogdanovAYu@ulsu.ru

Bogdanov Andrey Yuryevich
Candidate of physico-mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of applied mathematics,
Ulyanovsk State University

УДК 517.929

Богданов, А. Ю.

Новый подход к исследованию устойчивости неавтономных дискретных систем типа Лотки – Вольтерра / А. Ю. Богданов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 39–47.